

Introduction aux chaînes de Markov (3)

Miscellanea: simulation, problème de Dirichlet, temps d'atteinte

Jérémie Unterberger

Nancy, septembre 2019

Simulation des chaînes de Markov

► *Introduction. Marche aléatoire homogène sur \mathbb{Z}^d : cas général.*

$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$, $(Z_n)_{n \geq 1}$ v.a. i.i.d. à valeurs dans \mathbb{Z}^d

$\mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_n = x] = p_{x \rightarrow y} = \mathbb{P}[Z_{n+1} = y - x]$ indépendant de n

Simulation des chaînes de Markov

► *Introduction. Marche aléatoire homogène sur \mathbb{Z}^d : cas général.*

$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$, $(Z_n)_{n \geq 1}$ v.a. i.i.d. à valeurs dans \mathbb{Z}^d

$\mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_n = x] = p_{x \rightarrow y} = \mathbb{P}[Z_{n+1} = y - x]$ indépendant de n

Généralisation. Lemme (problème direct).

► S fini ou dénombrable

► $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probas

► $X_0 : \Omega \rightarrow S$ v.a.

► $(Z_n)_{n \geq 1}$ suite de v.a. réelles sur Ω , t.q. $(Z_n)_{n \geq 1}$ et X_0 indépendantes

► $f_n : S \times \mathbb{R} \rightarrow S$, $n \geq 1$ fonctions mesurables

Simulation des chaînes de Markov

► *Introduction. Marche aléatoire homogène sur \mathbb{Z}^d : cas général.*

$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$, $(Z_n)_{n \geq 1}$ v.a. i.i.d. à valeurs dans \mathbb{Z}^d

$\mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_n = x] = p_{x \rightarrow y} = \mathbb{P}[Z_{n+1} = y - x]$ indépendant de n

Généralisation. Lemme (problème direct).

► S fini ou dénombrable

► $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probas

► $X_0 : \Omega \rightarrow S$ v.a.

► $(Z_n)_{n \geq 1}$ suite de v.a. réelles sur Ω , t.q. $(Z_n)_{n \geq 1}$ et X_0 indépendantes

► $f_n : S \times \mathbb{R} \rightarrow S$, $n \geq 1$ fonctions mesurables

Alors

$$X_{n+1} = f_{n+1}(X_n, Z_{n+1}), \quad n \geq 0$$

définit une chaîne de Markov à valeurs dans S .

Preuve (Lemme).

Définition (tribu du passé). $\mathcal{G}_n :=$ tribu engendrée par X_0 et Z_1, \dots, Z_n

Propriétés essentielles. $(X_k)_{k \leq n}$ sont \mathcal{G}_n -mesurables, Z_{n+1} est indépendant de \mathcal{G}_n

$$A_n := \{X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\} \in \mathcal{G}_n$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbb{P}[(X_{n+1} = x_{n+1}) \cap A_n] &= \mathbb{P}[(f_{n+1}(X_n, Z_{n+1}) = x_{n+1}) \cap A_n] \\ &= \mathbb{P}[(f_{n+1}(x_n, Z_{n+1}) = x_{n+1}) \cap A_n] \\ &= \mathbb{P}[f_{n+1}(x_n, Z_{n+1}) = x_{n+1}] \mathbb{P}[A_n] \end{aligned}$$

Preuve (Lemme).

Définition (tribu du passé). $\mathcal{G}_n :=$ tribu engendrée par X_0 et Z_1, \dots, Z_n

Propriétés essentielles. $(X_k)_{k \leq n}$ sont \mathcal{G}_n -mesurables, Z_{n+1} est indépendant de \mathcal{G}_n

$$A_n := \{X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\} \in \mathcal{G}_n$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbb{P}[(X_{n+1} = x_{n+1}) \cap A_n] &= \mathbb{P}[(f_{n+1}(X_n, Z_{n+1}) = x_{n+1}) \cap A_n] \\ &= \mathbb{P}[(f_{n+1}(x_n, Z_{n+1}) = x_{n+1}) \cap A_n] \\ &= \mathbb{P}[f_{n+1}(x_n, Z_{n+1}) = x_{n+1}] \mathbb{P}[A_n] \end{aligned}$$

$$(2) \text{ Idem avec } A_n := \{X_n = x_n\}$$

Preuve (Lemme).

Définition (tribu du passé). $\mathcal{G}_n :=$ tribu engendrée par X_0 et Z_1, \dots, Z_n

Propriétés essentielles. $(X_k)_{k \leq n}$ sont \mathcal{G}_n -mesurables, Z_{n+1} est indépendant de \mathcal{G}_n

$$A_n := \{X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\} \in \mathcal{G}_n$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbb{P}[(X_{n+1} = x_{n+1}) \cap A_n] &= \mathbb{P}[(f_{n+1}(X_n, Z_{n+1}) = x_{n+1}) \cap A_n] \\ &= \mathbb{P}[(f_{n+1}(x_n, Z_{n+1}) = x_{n+1}) \cap A_n] \\ &= \mathbb{P}[f_{n+1}(x_n, Z_{n+1}) = x_{n+1}] \mathbb{P}[A_n] \end{aligned}$$

$$(2) \text{ Idem avec } A_n := \{X_n = x_n\}$$

$$\implies \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | A_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n]. \quad \square$$

Problème inverse: simulation des chaînes de Markov

Données. $\begin{cases} \mu_0 & \text{loi sur } \mathcal{S} \\ P(n), n \geq 1 & \text{matrices de transition sur } \mathcal{S} \end{cases}$.

Problème inverse: simulation des chaînes de Markov

Données. $\begin{cases} \mu_0 & \text{loi sur } S \\ P(n), n \geq 1 & \text{matrices de transition sur } S \end{cases}$

Problème.

① Trouver $\begin{cases} X_0 \\ (Z_n)_{n \geq 1} \\ f_n : S \times \mathbb{R} \rightarrow S \ (n \geq 1) \end{cases}$ v.a./fonctions vérifiant hypothèses du

Lemme et t.q. la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ définie par $X_{n+1} = f_{n+1}(X_n, Z_{n+1})$ ait loi initiale μ_0 et matrices de transition $(P(n))_{n \geq 1}$

Problème inverse: simulation des chaînes de Markov

Données. $\begin{cases} \mu_0 & \text{loi sur } S \\ P(n), n \geq 1 & \text{matrices de transition sur } S \end{cases}$

Problème.

- 1 Trouver $\begin{cases} X_0 \\ (Z_n)_{n \geq 1} \\ f_n : S \times \mathbb{R} \rightarrow S \ (n \geq 1) \end{cases}$ v.a./fonctions vérifiant hypothèses du

Lemme et t.q. la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ définie par $X_{n+1} = f_{n+1}(X_n, Z_{n+1})$ ait loi initiale μ_0 et matrices de transition $(P(n))_{n \geq 1}$

- 2 Simuler les v.a. X_0 et Z_n ($n \geq 1$), i.e. les obtenir à partir de v.a. simples déjà implémentées

► Problème inverse: simulation des chaînes de Markov *homogènes*

Données. $\begin{cases} \mu_0 & \text{loi sur } S \\ P & \text{matrice de transition sur } S \end{cases}$.

► Problème inverse: simulation des chaînes de Markov *homogènes*

Données. $\begin{cases} \mu_0 & \text{loi sur } S \\ P & \text{matrice de transition sur } S \end{cases}$.

Problème.

① Trouver $\begin{cases} X_0 \\ (Z_n)_{n \geq 1} \\ f : S \times \mathbb{R} \rightarrow S \ (n \geq 1) \end{cases}$ v.a./fonction vérifiant hypothèses du

Lemme et t.q. la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ définie par $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ ait loi initiale μ_0 et matrice de transition P

► Problème inverse: simulation des chaînes de Markov *homogènes*

Données. $\begin{cases} \mu_0 & \text{loi sur } S \\ P & \text{matrice de transition sur } S \end{cases}$

Problème.

- ① Trouver $\begin{cases} X_0 \\ (Z_n)_{n \geq 1} \\ f : S \times \mathbb{R} \rightarrow S \ (n \geq 1) \end{cases}$ v.a./fonction vérifiant hypothèses du

Lemme et t.q. la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ définie par $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ ait loi initiale μ_0 et matrice de transition P

- ② *Simuler* les v.a. X_0 et Z_n ($n \geq 1$), i.e. les obtenir à partir de v.a. simples déjà implémentées

► Problème inverse: simulation des chaînes de Markov *homogènes*

Données. $\begin{cases} \mu_0 & \text{loi sur } S \\ P & \text{matrice de transition sur } S \end{cases}$

Problème.

- ① Trouver $\begin{cases} X_0 \\ (Z_n)_{n \geq 1} \\ f : S \times \mathbb{R} \rightarrow S \ (n \geq 1) \end{cases}$ v.a./fonction vérifiant hypothèses du

Lemme et t.q. la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ définie par $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ ait loi initiale μ_0 et matrice de transition P

- ② *Simuler* les v.a. X_0 et Z_n ($n \geq 1$), i.e. les obtenir à partir de v.a. simples déjà implémentées

Solution générale du Problème 2. $X_0 := "F_0^{-1}"(U_0)$, $Z_n := "F_n^{-1}"(U_n)$,

$\begin{cases} (U_n)_{n \geq 0} \text{ v.a. i.i.d. } \mathcal{U}([0, 1]) \\ F_0, F_n \ (n \geq 1) \text{ fcts de répartition de } \mu_0, \text{ resp. } Z_n \ (n \geq 1) \end{cases}$
(cf. cours théorie de la mesure L3)

Solution particulière.

Pour une loi μ sur $S \simeq \{1, \dots, |S|\}$ ou \mathbb{N}^* ($\mu = \mu_0$ ou $\delta_x P$)

$$\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ i \mapsto x_i \end{array}$$

$$f_\mu(u) := \sum_i x_i \mathbf{1}_{\mu(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) \leq u < \mu(\{x_1, \dots, x_i\})}, \quad 0 \leq u < 1$$

Alors, si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[f_\mu(U) = x_i] &= \mathbb{P}[\mu(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) \leq u < \mu(\{x_1, \dots, x_i\})] \\ &= \mu(\{x_1, \dots, x_i\}) - \mu(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) = \mu_{x_i} \quad \Leftrightarrow f_\mu(U) \stackrel{(loi)}{=} \mu \end{aligned}$$

Solution particulière.

Pour une loi μ sur $S \simeq \{1, \dots, |S|\}$ ou \mathbb{N}^* ($\mu = \mu_0$ ou $\delta_x P$)

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ i \mapsto x_i \end{array}$$

$$f_\mu(u) := \sum_i x_i \mathbf{1}_{\mu(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) \leq u < \mu(\{x_1, \dots, x_i\})}, \quad 0 \leq u < 1$$

Alors, si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[f_\mu(U) = x_i] &= \mathbb{P}[\mu(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) \leq u < \mu(\{x_1, \dots, x_i\})] \\ &= \mu(\{x_1, \dots, x_i\}) - \mu(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) = \mu_{x_i} \quad \Leftrightarrow f_\mu(U) \stackrel{(loi)}{=} \mu \end{aligned}$$

Application à $\delta_x P$, $x \in S$:

$$(\delta_x P)_y = \sum_z \delta_x(z) p_{z \rightarrow y} = p_{x \rightarrow y} \text{ donc}$$

$$\delta_x P = \sum_y p_{x \rightarrow y} \delta_y$$

= loi de la position à l'instant $(n+1)$ partant de x à l'instant n

Solution particulière.

Pour une loi μ sur $S \simeq \{1, \dots, |S|\}$ ou \mathbb{N}^* ($\mu = \mu_0$ ou $\delta_x P$)

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ i \mapsto x_i \end{array}$$

$$f_\mu(u) := \sum_i x_i \mathbf{1}_{\mu(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) \leq u < \mu(\{x_1, \dots, x_i\})}, \quad 0 \leq u < 1$$

Alors, si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[f_\mu(U) = x_i] &= \mathbb{P}[\mu(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) \leq u < \mu(\{x_1, \dots, x_i\})] \\ &= \mu(\{x_1, \dots, x_i\}) - \mu(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) = \mu_{x_i} \quad \Leftrightarrow f_\mu(U) \stackrel{(loi)}{=} \mu \end{aligned}$$

Application à $\delta_x P$, $x \in S$:

$$(\delta_x P)_y = \sum_z \delta_x(z) p_{z \rightarrow y} = p_{x \rightarrow y} \text{ donc}$$

$$\delta_x P = \sum_y p_{x \rightarrow y} \delta_y$$

= loi de la position à l'instant $(n+1)$ partant de x à l'instant n

$$\Rightarrow \delta_x P \stackrel{(loi)}{=} f_{\delta_x P}(U) =: f(x, U), \quad f : S \times [0, 1] \rightarrow S$$

Solution du Problème: simulation des chaînes de Markov homogènes.

Rappel. $\delta_x P \stackrel{(loi)}{=} f_{\delta_x P}(U) =: f(x, U), \quad f : S \times [0, 1] \rightarrow S$

① $X_0 := f_{\mu_0}(U_0) \sim \mu_0$

② $X_{n+1} := f(X_n, U_{n+1}) \equiv f_{\delta_{X_n} P}(U_{n+1}) \stackrel{(loi)}{=} \delta_{X_n} P = \mathbb{P}_{X_{n+1}}$

Solution du Problème: simulation des chaînes de Markov homogènes.

Rappel. $\delta_x P \stackrel{(loi)}{=} f_{\delta_x P}(U) =: f(x, U), \quad f : S \times [0, 1] \rightarrow S$

① $X_0 := f_{\mu_0}(U_0) \sim \mu_0$

② $X_{n+1} := f(X_n, U_{n+1}) \equiv f_{\delta_{X_n} P}(U_{n+1}) \stackrel{(loi)}{=} \delta_{X_n} P = \mathbb{P}_{X_{n+1}}$

Plus précisément,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+1} = y | X_n = x] &= \mathbb{P}[f(x, U_{n+1}) = y | X_n = x] \\ &= \mathbb{P}[f(x, U_{n+1}) = y] \quad (\text{cf. Preuve problème direct}) \\ &= (\delta_x P)(y) = p_{x \rightarrow y}. \end{aligned}$$

Temps d'atteinte

Définition (temps d'atteinte de A). $\emptyset \subsetneq A \subset S$

$$T_A := \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}.$$

Convention importante: $\inf\{\emptyset\} = +\infty$, i.e. $T_A = +\infty$ si $\forall n, X_n \notin A$.

Temps d'atteinte

Définition (temps d'atteinte de A). $\emptyset \subsetneq A \subset S$

$$T_A := \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}.$$

Convention importante: $\inf\{\emptyset\} = +\infty$, i.e. $T_A = +\infty$ si $\forall n, X_n \notin A$.

Lemme. Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est irréductible et S fini, alors $T_A < \infty$ p.s.

Temps d'atteinte

Définition (temps d'atteinte de A). $\emptyset \subsetneq A \subset S$

$$T_A := \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}.$$

Convention importante: $\inf\{\emptyset\} = +\infty$, i.e. $T_A = +\infty$ si $\forall n, X_n \notin A$.

Lemme. Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est irréductible et S fini, alors $T_A < \infty$ p.s.

Contre-exemples.

- 1 $(X_n)_{n \geq 0}$ non irréductible, $S = \mathcal{C}_1 \uplus \mathcal{C}_2$ classes fermées, \mathbb{P}_{X_0} à support dans \mathcal{C}_1 , $A \subset \mathcal{C}_2$! (cf. T.D.)
- 2 $(X_n)_{n \geq 0}$ = marche aléatoire symétrique simple dans \mathbb{Z}^d , A fini (p. ex. $A = \{y\}$). Alors
 $\mathbb{P}[T_A < \infty] = 1 \iff d \leq 2$ (non démontré dans ce cours!)

Temps d'atteinte

Définition (temps d'atteinte de A). $\emptyset \subsetneq A \subset S$

$$T_A := \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}.$$

Convention importante: $\inf\{\emptyset\} = +\infty$, i.e. $T_A = +\infty$ si $\forall n, X_n \notin A$.

Lemme. Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est irréductible et S fini, alors $T_A < \infty$ p.s.


Contre-exemples.

- 1 $(X_n)_{n \geq 0}$ non irréductible, $S = \mathcal{C}_1 \uplus \mathcal{C}_2$ classes fermées, \mathbb{P}_{X_0} à support dans \mathcal{C}_1 , $A \subset \mathcal{C}_2$! (cf. T.D.)
- 2 $(X_n)_{n \geq 0}$ = marche aléatoire symétrique simple dans \mathbb{Z}^d , A fini (p. ex. $A = \{y\}$). Alors
 $\mathbb{P}[T_A < \infty] = 1 \iff d \leq 2$ (non démontré dans ce cours!)

En fait: $T_y := T_{\{y\}}$,


$d = 1, 2$: $T_y < \infty$ p.s.; # visites en $y = +\infty$ p.s. (chaîne récurrente)

$d = 3$: $\mathbb{P}[T_y = \infty] > 0$; # visites en $y < \infty$ p.s. (chaîne transiente)

 $d = 1, 2: T_y < \infty$ p.s. mais $\mathbb{E}[T_y] = \infty$!

Preuve (Lemme). S fini, $(X_n)_{n \geq 0}$ irréductible, $A = \{y\}$ ($y \neq x_0$) (sans restriction de généralité)

► S fini, $(X_n)_{n \geq 0}$ irréductible $\implies \exists N \geq 1, (n_z)_{z \neq y} \leq N \mid p_{z \rightarrow y}^{(n_z)} > 0$


 $d = 1, 2: T_y < \infty$ p.s. mais $\mathbb{E}[T_y] = \infty$!

Preuve (Lemme). S fini, $(X_n)_{n \geq 0}$ irréductible, $A = \{y\}$ ($y \neq x_0$) (sans restriction de généralité)

► S fini, $(X_n)_{n \geq 0}$ irréductible $\implies \exists N \geq 1, (n_z)_{z \neq y} \leq N \mid p_{z \rightarrow y}^{(n_z)} > 0$

► *Propriété de Markov simple*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x[T_y > (n+1)N] &= \sum_{z \neq y} \mathbb{P}_x[(T_y > nN, X_{nN} = z) \cap (T_y > (n+1)N)] \\ &= \sum_{z \neq y} \mathbb{P}_x[T_y > nN, X_{nN} = z] \mathbb{P}_z[T_y > N] \\ &\leq \mathbb{P}_x[T_y > nN] (1 - p), \quad p := \min_{z \neq y} p_{z \rightarrow y}^{(n_z)} > 0 \end{aligned}$$

 $d = 1, 2$: $T_y < \infty$ p.s. mais $\mathbb{E}[T_y] = \infty$!

Preuve (Lemme). S fini, $(X_n)_{n \geq 0}$ irréductible, $A = \{y\}$ ($y \neq x_0$) (sans restriction de généralité)

► S fini, $(X_n)_{n \geq 0}$ irréductible $\implies \exists N \geq 1, (n_z)_{z \neq y} \leq N \mid p_{z \rightarrow y}^{(n_z)} > 0$

► *Propriété de Markov simple*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x[T_y > (n+1)N] &= \sum_{z \neq y} \mathbb{P}_x[(T_y > nN, X_{nN} = z) \cap (T_y > (n+1)N)] \\ &= \sum_{z \neq y} \mathbb{P}_x[T_y > nN, X_{nN} = z] \mathbb{P}_z[T_y > N] \\ &\leq \mathbb{P}_x[T_y > nN] (1 - p), \quad p := \min_{z \neq y} p_{z \rightarrow y}^{(n_z)} > 0 \end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{P}[T_y = \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[T_y > nN] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p)^n = 0.$$

Chaîne de Markov arrêtée

$$\emptyset \subsetneq A \subset S$$

$(X_n)_{n \geq 0}$ chaîne de Markov de matrice de transition P

Définition (chaîne de Markov arrêtée en A).

$$p_{x \rightarrow y}^A = \begin{cases} p_{x \rightarrow y} & x \notin A \\ \delta_{x,y} & x \in A \end{cases}$$

Chaîne de Markov arrêtée

$$\emptyset \subsetneq A \subset S$$

$(X_n)_{n \geq 0}$ chaîne de Markov de matrice de transition P

Définition (chaîne de Markov arrêtée en A).

$$p_{x \rightarrow y}^A = \begin{cases} p_{x \rightarrow y} & x \notin A \\ \delta_{x,y} & x \in A \end{cases}$$

Lemme. Partant de $(X_n)_{n \geq 0}$,

$$X_n^A := \begin{cases} X_n & n \leq T_A \\ X_{T_A} & n > T_A \end{cases}$$

définit une chaîne de Markov de matrice de transition $P^A = (p_{x \rightarrow y}^A)_{x,y}$.

Chaîne de Markov arrêtée

$$\emptyset \subsetneq A \subset S$$

$(X_n)_{n \geq 0}$ chaîne de Markov de matrice de transition P

Définition (chaîne de Markov arrêtée en A).

$$p_{x \rightarrow y}^A = \begin{cases} p_{x \rightarrow y} & x \notin A \\ \delta_{x,y} & x \in A \end{cases}$$

Lemme. Partant de $(X_n)_{n \geq 0}$,

$$X_n^A := \begin{cases} X_n & n \leq T_A \\ X_{T_A} & n > T_A \end{cases}$$

définit une chaîne de Markov de matrice de transition $P^A = (p_{x \rightarrow y}^A)_{x,y}$.

Preuve. Soit $\mathcal{B} := (X_{n-1}^A = x_{n-1}, \dots, X_0^A = x_0)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(X_n^A = y) \cap \mathcal{B}] &= \mathbb{P}[(X_n^A = y) \cap \mathcal{B} \cap (T_A \geq n)] + \mathbb{P}[(X_n^A = y) \cap \mathcal{B} \cap (T_A < n)] \\ &= \mathbf{1}_{x_{n-1} \notin A} \mathbb{P}[(X_n = y) \cap \mathcal{B}] + \mathbf{1}_{x_{n-1} \in A} \delta_{x_{n-1},y} \mathbb{P}[\mathcal{B}] \\ &= \left(\mathbf{1}_{x_{n-1} \notin A} p_{x_{n-1} \rightarrow y} + \mathbf{1}_{x_{n-1} \in A} \delta_{x_{n-1},y} \right) \mathbb{P}[\mathcal{B}] = p_{x_{n-1} \rightarrow y}^A \mathbb{P}[\mathcal{B}] \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}[X_n^A = y | \mathcal{B}]$ ne dépend que de x_{n-1} .

Applications possibles des chaînes de Markov arrêtées: cas des marches aléatoires simples

$$S = \mathbb{Z}^d = \cup_{k \geq 0} S_k, S_0 \subset S_1 \subset \dots$$

$$\text{Ex.: } S_k := \{-k, \dots, k\}^d \text{ ou } \{-2^k, \dots, 2^k\}^d$$

Hypothèse: $\mu_0 := \mathbb{P}_{X_0}$ à support fini, p. ex. $\mu_0 = \delta_0$

► quitte à remplacer $(S_k)_k$ par $(S_{k+k_{\min}})_k$, on peut supposer $\text{supp}(\mu_0) \subset S_0$

Applications possibles des chaînes de Markov arrêtées: cas des marches aléatoires simples

$$S = \mathbb{Z}^d = \cup_{k \geq 0} S_k, S_0 \subset S_1 \subset \dots$$

$$\text{Ex.: } S_k := \{-k, \dots, k\}^d \text{ ou } \{-2^k, \dots, 2^k\}^d$$

Hypothèse: $\mu_0 := \mathbb{P}_{X_0}$ à support fini, p. ex. $\mu_0 = \delta_0$

► quitte à remplacer $(S_k)_k$ par $(S_{k+k_{\min}})_k$, on peut supposer $\text{supp}(\mu_0) \subset S_0$

Idée: $A_k := \mathbb{Z}^d \setminus S_k$ (ou $A_k := \partial_P(S_k)$ bord extérieur de $S_k \subset S_{k+1} \setminus S_k$)

► $X_n^{A_k}$ coïncide avec X_n pour tout $n \leq k$ ou 2^k

► X^{A_k} est une marche aléatoire sur S_{k+1} **fini**

⇒ Nombre de résultats sur X peuvent être obtenus comme limites de résultats sur X^{A_k} quand $k \rightarrow \infty$

Définition. Bord extérieur. Soit $\emptyset \subsetneq A \subsetneq S$, $D := S \setminus A$,

$$\partial_P D := \{y \in A \mid \exists x \in D, p_{x \rightarrow y} > 0\}$$

Formule de Dirichlet: énoncé

$x \in S$ condition initiale, $\emptyset \subsetneq A \subsetneq S$, $D := S \setminus A$, f fonction dans $C_b(A)$ ou $C_b(D)$ (espace fonctions bornées)

- ① Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, alors la valeur moyenne de f au temps d'atteinte de A ,

$$u_f^A(x) := \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_A < \infty} f(X_{T_A})]$$

est solution de

$$\begin{cases} (I - P)u_f^A(x) = 0 & x \in D \\ u_f^A(x) = f(x) & x \in A \end{cases}$$

- ② (version "intégrée" en temps) Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, alors la moyenne de la somme des valeurs de f le long des trajectoires jusqu'au temps d'atteinte de A ,

$$G_f^A(x) := \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{T_A < \infty} \sum_{n=0}^{T_A-1} f(X_n)\right]$$

est solution de

$$\begin{cases} (I - P)G_f^A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < \infty] f(x) & x \in D \\ G_f^A(x) = 0 & x \in A \end{cases}$$

Cas particuliers, Applications. Cas de la valeur moyenne au temps d'atteinte.

Rappel. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $u_f^A(x) := \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_A < \infty} f(X_{T_A})]$

► $f := \delta_y$ ($y \in A$): alors $u_y^A(x) :=$ **probabilité de sortie en y**
 $= \mathbb{P}_x[T_A < \infty, X_{T_A} = y]$ solution de

$$(*) \quad \begin{cases} (I - P)u_y^A(x) = 0 & x \in D \\ u_y^A(x) = \delta_{x,y} & x \in A \end{cases}$$

Cas particuliers, Applications. Cas de la valeur moyenne au temps d'atteinte.

Rappel. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $u_f^A(x) := \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_A < \infty} f(X_{T_A})]$

► $f := \delta_y$ ($y \in A$): alors $u_y^A(x) :=$ **probabilité de sortie en y**
 $= \mathbb{P}_x[T_A < \infty, X_{T_A} = y]$ solution de

$$(*) \quad \begin{cases} (I - P)u_y^A(x) = 0 & x \in D \\ u_y^A(x) = \delta_{x,y} & x \in A \end{cases}$$

► $f := \mathbf{1}_A$: alors $u^A(x) :=$ **probabilité d'atteindre A** $= \mathbb{P}_x[T_A < \infty]$ solution de

$$(**) \quad \begin{cases} (I - P)u^A(x) = 0 & x \in D \\ u^A(x) = 1 & x \in A \end{cases}$$

Cas particuliers, Applications. Cas de la valeur moyenne au temps d'atteinte.

Rappel. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $u_f^A(x) := \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_A < \infty} f(X_{T_A})]$

► $f := \delta_y$ ($y \in A$): alors $u_y^A(x) :=$ **probabilité de sortie en y**
 $= \mathbb{P}_x[T_A < \infty, X_{T_A} = y]$ solution de

$$(*) \quad \begin{cases} (I - P)u_y^A(x) = 0 & x \in D \\ u_y^A(x) = \delta_{x,y} & x \in A \end{cases}$$

► $f := \mathbf{1}_A$: alors $u^A(x) :=$ **probabilité d'atteindre A** $= \mathbb{P}_x[T_A < \infty]$ solution de

$$(**) \quad \begin{cases} (I - P)u^A(x) = 0 & x \in D \\ u^A(x) = 1 & x \in A \end{cases}$$

Remarques.

- pour une chaîne *récurrente*, (*) et (**) ont une solution unique, donc $u^A = 1$;
- la (les) solution(s) dans $D \uplus \partial_P D$ ne dépend(ent) que de $f|_{\partial_P D}$, la définition de u_f^A également, donc on peut remplacer A par $\partial_P D$ et résoudre dans $D \uplus \partial_P D$. Alors $T_A = T_{\partial_P D} =$ **temps de sortie de D**

- $U : C_b(A) \rightarrow C_b(S)$ ou $C_b(\partial_P D) \rightarrow C_b(D \uplus \partial_P D)$, $f \mapsto u_f^A$ est linéaire, donc

$$u_f^A(x) = \sum_y U^A(x, y) f(y), \quad U^A(x, y) := u_{\delta_y}^A(x)$$

On dit que l'opérateur U a pour **noyau de Poisson** la fct de 2 variables $U : S \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ou $(D \uplus \partial_P D) \times \partial_P D \rightarrow \mathbb{R}$.

- *Note de culture générale.* $I - P :=$ **Laplacien de la chaîne**

► Marche aléatoire simple, réseau quelconque sur \mathbb{Z}^d

$I - P^a \underset{a \rightarrow 0}{\sim} -a^2 \Delta$ si $a = \text{pas}$,

Opérateur Laplacien: $\Delta := \sum_{1 \leq i, j \leq d} c_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$,

$C = (c_{i,j})$ matrice symétrique définie positive

$D \rightarrow$ domaine de \mathbb{R}^d (ouvert borné)

Problème de Dirichlet (dans le continu)

$$\begin{cases} \Delta u_f(x) = 0 & x \in D \\ u_f(x) = f(x) & x \in \partial D \end{cases}$$

Solution: $u_f(x) =: \int U_D(x, y) f(y) dy$, $U_D =$ noyau de Poisson du Laplacien Δ dans D

Cas particuliers, Applications. Version "intégrée" en temps.

Rappel. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $G_f^A(x) := \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{T_A < \infty} \sum_{n=0}^{T_A-1} f(X_n) \right]$

► $f := \delta_y$, $y \in D$: alors $G_y^A(x) :=$ nombre moyen de visites en y partant de x jusqu'au temps d'atteinte de $A = \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{T_A < \infty} \sum_{n=0}^{T_A-1} \mathbf{1}_{X_n=y} \right]$ solution de

$$(*) \quad \begin{cases} (I - P)G_y^A(x) = \mathbb{P}[T_A < \infty] \delta_{x,y} & x \in D \\ G_y^A(x) = 0 & x \in A \end{cases}$$

Terminologie. Fonction de Green de la chaîne sur D

$$G^A : (D \uplus \partial_P D) \times (D \uplus \partial_P D) \rightarrow \mathbb{R}, \quad G^A(x, y) := G_y^A(x)$$

$G^A(x, y) = 0$ si x ou $y \in \partial_P D$

► $f := 1$: temps moyen de sortie

► variante: $\mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{T_A < \infty} \sum_{n=0}^{T_A-1} f(X_n) \right] \longrightarrow \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{T_A < \infty, X_{T_A}=y} \sum_{n=0}^{T_A-1} f(X_n) \right]$

Formule de Dirichlet: preuve

Principe général: analyse au 1er pas + propriété de Markov

Rappel. \mathcal{G}_n = tribu du passé = tribu engendrée par X_0, \dots, X_n

$\mathcal{A} \in \mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{B} \in \sigma((X_{m+n})_{m \geq 0})$

$$\mathbb{P}_x[\mathcal{B} \cap (X_n = x_n) \cap \mathcal{A}] = \mathbb{P}_{x_n}[\mathcal{B}] \times \mathbb{P}[(X_n = x_n) \cap \mathcal{A}]$$

Formule de Dirichlet: preuve

Principe général: analyse au 1er pas + propriété de Markov

Rappel. $\mathcal{G}_n = \text{tribu du passé} = \text{tribu engendrée par } X_0, \dots, X_n$

$$\mathcal{A} \in \mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{B} \in \sigma((X_{m+n})_{m \geq 0})$$

$$\mathbb{P}_x[\mathcal{B} \cap (X_n = x_n) \cap \mathcal{A}] = \mathbb{P}_{x_n}[\mathcal{B}] \times \mathbb{P}[(X_n = x_n) \cap \mathcal{A}]$$

- ① Rappel. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $u_f^A(x) := \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_A < \infty} f(X_{T_A})]$. Preuve (sans restriction de généralité) dans le cas où $f = \mathbf{1}_y$, $y \in A$

Si $x \notin A$, $T_A \geq 1$ et donc

$$\begin{aligned} u_y^A(x) &= \mathbb{P}_x[T_A < \infty, X_{T_A} = y] = \sum_{x_1 \in S} \mathbb{P}_x[(X_1 = x_1) \cap (T_A < \infty, X_{T_A} = y)] \\ &= \sum_{x_1} \mathbb{P}_{x_1}[T_A < \infty, X_{T_A} = y] \times p_{x \rightarrow x_1} = \sum_{x_1} p_{x \rightarrow x_1} u_y^A(x_1) = P u_y^A(x) \end{aligned}$$

- ② Preuve (sans restriction de généralité) dans le cas où $f = \mathbf{1}_y$, $y \in D$ □

Si $x \notin A$, $T_A \geq 1$ et donc

$$\begin{aligned} G_y^A(x) &= \underbrace{\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_A < \infty} \mathbf{1}_{X_0=y}]}_{\mathbb{P}[T_A < \infty] \delta_{x,y}} + \underbrace{\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{T_A < \infty} \sum_{n=1}^{T_A-1} \mathbf{1}_{X_n=y}]}_{\sum_{x_1} p_{x \rightarrow x_1} G_y^A(x_1)} = P G_y^A(x) \end{aligned}$$